Cahier de vacances

Mathématiques approfondies – Vers la ECG 2

Lycée Thiers · Année 2026–2027

Contents

Chapitre 1 Analyse

1 Sommes finies

Exercice 1 ♢ 20 min

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Calculer les sommes et produits suivants :

$$C_1 = \sum_{k=0}^{2n} |n-k|, \quad C_2 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^3}{(k-1)^2(k+1)}\right), \quad C_3 = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!,$$

$$C_4 = \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2+k-2}{k^2+2k-3}, \quad C_5 = \prod_{k=1}^{n} ke^{-2k}.$$

Exercice 2 ♢ **Sommes des puissances des premiers entiers** 30 min

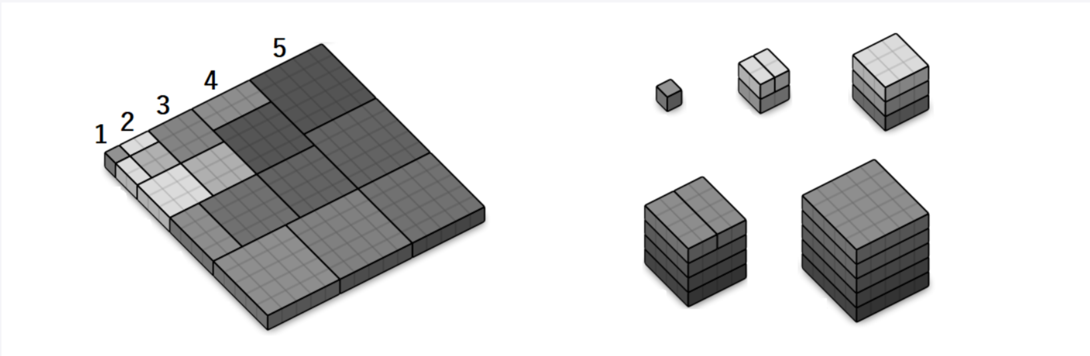
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_i(n) = \sum_{k=0}^{n} k^i \qquad \text{et} \qquad T_i(n) = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{i+1} - k^{i+1}\right).$$

1. Cas particulier.

a) Rappeler les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$ en fonction de n.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_3(n) = S_1(n)^2$.
Expliquer cette relation à l'aide du dessin suivant :



2. Cas général.

a) i. Calculer $T_i(n)$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1$.

ii. Développer $(k+1)^{i+1}$ à l'aide du symbole Σ. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n).$$

b) Conclure :

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1}\left((n+1)^{i+1} - 1 - \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n)\right).$$

3. Démontrer que $S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

4. Écrire un programme Python qui prend en arguments n et i et calcule $S_i(n)/\left(n^{i+1}/(i+1)\right)$. Tester et commenter.

2 Suites et séries

Méthode

Analyse asymptotique

- Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, prouver $u_n = o(v_n)$ revient à montrer $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
- Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, prouver $u_n \sim v_n$ revient à montrer $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.
- On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.

Exercice 3 ♢ 20 min

Dans chacun des exemples suivants, déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_n$.

1. $u_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^2+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$
3. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
4. $u_n = \ln\left(1 + e^{1/n^2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n + \ln(1+e^n)}$
6. $u_n = e^{1/n+1/n^2} - e^{1/n}$

Exercice 4 ♢ **Contre-exemples** 15 min

1. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que (u_n) et (u_{n+1}) ne soient pas équivalents.
2. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que u_n et u_{n+1} ne soient pas équivalents.
3. Donner un exemple d'une fonction f et de suites (u_n), (v_n) telles que $u_n \sim v_n$ mais $f(u_n) \not\sim f(v_n)$.

Exercice 5 ♢ 20 min

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et trouver un équivalent simple de (u_n).

Méthode

Comment justifier une convergence ?

- **Si on ne demande pas le calcul de la somme.**
  - Utiliser les critères d'équivalence, de négligeabilité ou de comparaison en utilisant les séries de référence (en particulier, les séries de Riemann).
  - Revenir à la définition et montrer que la suite des sommes partielles ($S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$) est convergente.
- **Si on demande le calcul de la somme.**
  - Reconnaître une somme de référence (exponentielle, géométrique, géométriques dérivées).
  - Réécrire le terme général sous la forme $a_{k+1} - a_k$ pour faire un télescopage.

Exercice 6 ♢ 30 min

Étudier la convergence des séries :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2^2+\cdots+n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^5}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 2} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

♢♢ Discuter en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de la convergence de :

$$\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^\alpha}{n^2 + n^\beta}.$$

Exercice 7 ♢ 20 min

Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} e^{-k}, \qquad B = \sum_{k\geq 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}, \qquad C = \sum_{k\geq 1} \frac{k^2}{2^k}.$$

Méthode

Comment justifier la convergence d'une suite à l'aide des séries ?

Pour étudier la convergence d'une suite u, on peut étudier celle de la série $\sum(u_n - u_{n-1})$.

Exemple. Montrons que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ converge en utilisant $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

La série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. Or $S_n = u_n - u_0$, donc (u_n) converge aussi.

Exercice 8 ♢ 15 min

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 2\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire la convergence de la suite u.

Exercice 9 ♢♢ 25 min

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

1. Pourquoi cette suite est-elle bien définie et positive ?
2. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}$.
   b) Justifier que $x_n \to 0$.
3. Démontrer la convergence de la série $\sum x_n$ et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$.

Source : Michael Penn, Putnam Exam 2016 B1

Exercice 10 ♢♢ **Avec un peu d'algèbre linéaire** 30 min

On définit les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 sur $\mathbb{R}$ par

$$P_0 = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x(x-1),\ P_3(x) = x(x-1)(x-2),\ P_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_4[x]$. Avec un argument d'algèbre linéaire, justifier l'existence de $\alpha_0, \dots, \alpha_4$ tels que $P = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i P_i$.
2. a) Vérifier que pour tout indice i, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_i(n)}{n!} = e$.
   b) Calculer en fonction de $\alpha_0, \dots, \alpha_4$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$.
3. *Application.* Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2}{n!}$.

Exercice 11 ◇◇ **Étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$** 40 min

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n) + 2$.

1. Comment obtenir à l'aide de Python le graphe de $f : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x) + 2$ ainsi que celui de $x \mapsto x$ sur $[0\,;\,7/2]$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   a) Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|y - x|$.
   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq \dfrac{|v_0|}{2^n}$.
   c) Justifier la convergence de la suite u. Notons ℓ la limite.
3. En utilisant la question 2(a), démontrer que ℓ est l'unique solution de $f(x) = x$.
4. On note R_n le reste d'ordre n de la série $\sum v_k$.
   a) Comparer $\ell - u_n$ et R_{n-1}.
   b) En déduire que $|\ell - u_n| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. *On admet que* $|u_1 - u_0| \leq 1$.
5. Compléter le programme suivant qui prend en argument ε et renvoie une approximation de ℓ à ε près :

```python
def approx( ) :
    u= ....
    erreur=2
    while ....
        u= ....
        erreur= ....
```

Exercice 12 ◇◇ **Formule du binôme négatif** *D'après EDHEC 2015* 25 min

1. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, vérifier l'équivalent $\binom{k}{p} \sim_{k\to+\infty} \dfrac{k^p}{p!}$. En déduire la convergence de $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^k$.
2. On définit, pour $x \in]-1,1[$, $S_p(x) = \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^k$.
   a) Préciser $S_0(x)$.
   b) À l'aide de la formule du triangle de Pascal, démontrer que $(1-x)S_{p+1}(x) = xS_p(x)$.
   c) Conclure avec $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 13 ◇◇◇ **Recherche d'un équivalent par le lemme de Cesaro** *D'après oraux HEC* 1h20

On admet la propriété suivante :

> (P) : Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k$ converge aussi vers L.

On se donne deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\frac{1+\alpha u_n}{1+\beta u_n}.$$

1. *Question de cours :* Convergence et divergence des suites réelles monotones.
2. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
   a) Étudier les variations de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\dfrac{1+x}{1+2x}$.
   b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

c) Écrire un programme Python permettant le calcul de u_{10}.

3. Dans le cas général, prouver que (u_n) converge et donner sa limite.
4. On pose $v_n = 1/u_n$. Prouver que $(v_{n+1} - v_n)$ converge vers $\beta - \alpha$.
5. En utilisant (P), déduire un équivalent de u_n de la forme $\dfrac{1}{q \cdot n}$ où $q > 0$.
6. Discuter en fonction de $\gamma \in \mathbb{R}$ la convergence de la série $\sum u_n^\gamma$.

3 Limites et continuité

3.1 Développements limités

Méthode

DLs usuels à l'ordre 2 et n :

$$(1+x)^\alpha = \cdots, \quad \frac{1}{1-x} = \cdots, \quad e^x = \cdots, \quad \ln(1+x) = \cdots, \quad \cos x = \cdots, \quad \sin x = \cdots$$

Comment calculer le DL d'un produit ?

Exemple : $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^x(1+\sin x)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad 1 + \sin x = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$e^x(1+\sin x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Méthode

Comment effectuer un changement de variable dans un DL ?

Exemple 1. $\sin(3t) = 3t - \dfrac{9}{2}t^3 + o(t^4)$.

Exemple 2. $\ln(1+t^2) = t^2 - \dfrac{1}{2}t^4 + o(t^4)$.

Exercice 14 ♢ 1h

Écrire le DL à l'ordre n indiqué, au voisinage de 0, pour les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto 5 - 3x + 4x^2 + 4x^5 - 12x^7$, $n = 3$
2. $x \mapsto \cos(x) + \ln(1+x)$, $n = 2$
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $n = 2$
4. $x \mapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $n = 3$
5. $x \mapsto \ln(2+x)$, $n = 2$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x + x^4 + e^x}$, $n = 3$
7. $(3x^8 - 14x^6 + 13x^5 + 5x^3 - x^2 + 1)(1+x)^{1/2}$, $n = 2$
8. $x \mapsto e^x(1+\sin x)$, $n = 3$
9. $x \mapsto \dfrac{3 + x^2 + x^3 + \ln(1+x)}{1-x}$, $n = 2$
10. $x \mapsto (\sin x)^2 \cos(x)$, $n = 4$
11. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $n = 4$
12. ♢♢ $x \mapsto \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 15 ◇ 20 min

Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$

3.2 Continuité

Méthode

Comment appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ?

En pratique, on se ramène au cas $y = 0$ à l'aide d'une fonction auxiliaire g :

Exemple. Montrons que pour toute fonction continue $f : [0;1] \to [0;1]$, il existe $c \in [0;1]$ tel que $c = f(c)$. On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. On a $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$. Par le TVI, il existe $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$.

Exercice 16 ◇ 10 min

Prouver qu'il existe un réel $x > 0$ tel que $3^x + 5^x = 7^x$.

Exercice 17 ◇◇ 25 min

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application polynomiale.

1. Justifier que si P est de degré impair, alors P est surjective.
2. Préciser la réciproque.

Exercice 18 ◇◇ **Exemple de suite implicite.** *D'après EMLyon* 1h

On note $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x^2}$.

1. a) Justifier précisément que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la dérivée.
   b) Préciser la parité de f_n.
   c) En déduire le tableau de variation et le graphe de f_n sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Distinguer $x \in [0,1]$ et $x \geq 1$.
3. a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$ admet une unique solution $x_n \in [0,1]$.
   b) Écrire un programme Python qui trace les graphes de f_n et $x \mapsto 1 - x$ sur $[0,1]$.
   c) Conjecturer la monotonie de $(x_n)_{n\geq 2}$. Prouver votre conjecture. En déduire la convergence vers une limite ℓ.
   d) Raisonner par l'absurde pour montrer que $\ell = 1$.
   e) Donner la bonne limite de $(x_n^n)_{n\geq 2}$.

4 Dérivation et intégration

4.1 Dérivation

Exercice 19 ◇ 20 min

On dit qu'un polynôme P non constant est *scindé* dans $\mathbb{R}$ s'il se factorise dans $\mathbb{R}$ en produit de polynômes du premier degré. Montrer que si P est un polynôme réel non constant scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, P' est aussi scindé à racines simples.

Exercice 20 ◇◇ 40 min

Pour tout réel x, on pose $f(x) = xe^x$.

1. Justifier que f définit une bijection de $I = [-1, +\infty[$ sur $J = [-1/e, +\infty[$.
2. On note W la bijection réciproque. Préciser les variations de W sur J.
3. Tracer le graphe de f et compléter avec le graphe de W.
4. a) Préciser $W(0)$ et $W(e)$.

   b) Justifier que W est dérivable sur $J \setminus \{-1/e\}$ avec $W'(x) = \dfrac{1}{x + e^{W(x)}}$.

   c) En déduire les équations des tangentes en 0 et en e de la fonction W.

Exercice 21 ◇◇ **Généralisation des accroissements finis** 20 min

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$: $g(b) - g(a) \neq 0$.
2. Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$, il existe c_b compris entre a et b, tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c_b)}{g'(c_b)}$.

   Indication. Considérer, pour un certain λ bien choisi, la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$.
3. Application.

   a) Montrer que si $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

   b) Calculer $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2}$.

Exercice 22 ◇◇ **Étude de relations fonctionnelles** 30 min

1. Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. On se propose de trouver les fonctions dérivables vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

   a) Justifier que si f s'annule une fois, alors f est la fonction nulle.

   b) Prouver que si f est non nulle alors f est strictement positive.

   c) Conclure en utilisant $g = \ln \circ f$.

   d) Que dire si on suppose seulement f dérivable en 0 ?

4.2 Intégration

Méthode

Comment encadrer une intégrale ?

Exemple : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t)^n \,\mathrm{d}t$. On a $0 \leq \ln(1 + t)^n \leq t^n$, donc $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1} \to 0$.

Exercice 23 ◇ 15 min

Prouver par encadrement la convergence vers 0 des suites de terme général :

$$K_n = \int_0^1 e^{-t^n} \cos(t/n) \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad L_n = \int_0^1 \sin(t^n) \,\mathrm{d}t.$$

Méthode

Comment rédiger une intégration par parties ?

Exemple 1. $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(t) \,\mathrm{d}t = -2$.

Exemple 2. La primitive de ln qui s'annule en 1 est $x \mapsto x\ln(x) - x + 1$.

Exercice 24 ♢ 15 min

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $S = \int_0^x \sin(t)e^t \,\mathrm{d}t$ et $C = \int_0^x \cos(t)e^t \,\mathrm{d}t$.
À l'aide de deux intégrations par parties, trouver deux relations reliant S à C, et en déduire que :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \qquad \text{et} \qquad C = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$$

Méthode

Comment rédiger un changement de variable sur un segment ?

Exemple 1. $I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \,\mathrm{d}t$. Poser $u = e^t$: $I = \int_1^e \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\ln(e+1) - 2\ln 2 - 1$.

Exemple 2. $J = \int_1^2 e^{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$. Poser $u = \sqrt{t}$: $J = 2(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}}$.

Exercice 25 ♢ 5 min

Calculer $\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1 + \ln t}}$ en posant $u = \ln t$.

Exercice 26 ♢♢ 20 min

On pose $I = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) \,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\pi/4} \ln\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{4} - x\Big)\Big) \,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I et J sont bien définies.
2. Montrer que $I = J$.
3. En déduire la valeur de $A = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) \,\mathrm{d}t$.

Les exercices

Exercice 27 ♢ 10 min

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t = 1$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = e^{-a}$.

Exercice 28 ♢♢ 30 min

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Préciser I_0 et I_1.
2. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+2)(I_n - I_{n+1})$.

   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
3. En déduire $\int_0^{\pi/2} \cos(t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 29 ♢♢ 30 min

Soit la fonction $F : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^1 \frac{e^t}{t + x} \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Montrer que $F(x) = e^{-x}\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $F'(x) + F(x) = \dfrac{e^{x+1}-1}{x}$... *(corriger selon l'énoncé original).*
4. Étudier la limite de F en $+\infty$.

Exercice 30 ◇◇◇ **Intégrale à paramètre** *D'après oral ESCP 2014* 1h

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et que φ est paire.
2. Étudier la monotonie de φ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |x^2 - x_0^2| \displaystyle\int_1^e t^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$.
5. a) Par le changement de variable $u = xt$, montrer que $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xe} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{\ln x}{x}\int_x^{xe} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
   b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
6. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^2\varphi(x) = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{2}{e}$.

Exercice 31 ◇◇◇ **Produit de convolution** 45 min

Pour toutes fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit $f * g$ par $f * g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que $f * g = g * f$.
2. a) Expliciter $\exp * \exp$.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = t^n$ si $t > 0$, 0 sinon. Pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $H_{n,m} = f_n * f_m$. Justifier que pour $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $H_{n,m} = \dfrac{m}{n+1} H_{n+1,m-1}$.
   c) Montrer que pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $H_{n,m} = \dfrac{m!\,n!}{(m+n)!} H_{n+m,0}$. Expliciter $H_{n,m}$.

Exercice 32 ◇◇◇ *Questions sans préparation HEC* 25 min

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. a) Calculer $u_{n+2} + u_n$.
   b) En déduire la limite de (u_n) ainsi qu'un équivalent de (u_n) quand $n \to +\infty$.

Méthode

Sommes de Riemann. Pour f continue sur $[0;1]$: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 33 ◇◇ 25 min

Déterminer l'existence et la valeur de la limite des suites :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}, \quad w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

Exercice 34 ♢♢♢ 30 min

Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+n+k^2}$.

5 Intégrales généralisées

Méthode

Comment rédiger une comparaison à une intégrale de Riemann ?

Exemple 1. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 \ln t}$ converge (car $\frac{1}{t^2 \ln t} \leq \frac{1}{t^2}$ et Riemann avec exposant $2 > 1$).

Exemple 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2t}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge (car $\frac{e^{-2t}-1}{t^2} \sim \frac{-2}{t}$ et Riemann avec exposant $1 \leq 1$).

Exercice 35 ♢ 40 min

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

1. Prouver la convergence de I_n.
2. On pose $I_n(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$. Par intégration par parties, montrer que $I_n(A) = \dfrac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\big(I_n(A) - I_{n+1}(A)\big)$.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{3n-1}$.

   b) On admet $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n} = 0$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

   b) En déduire pour tout $n \geq 2$: $I_n = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.
5. On admet $I_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Écrire un script Python qui prend en argument $n \geq 2$ et calcule I_n.

Exercice 36 ♢♢ **Intégrale à paramètre** 30 min

Partie I.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe.
2. Montrer que $G(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Partie II.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe.
4. Montrer que pour tout $(t,x,h) \in \mathbb{R}^3$, $|\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)| \leq \dfrac{t^2h^2}{2}$.
5. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = G(x)$.
6. En déduire F.

Exercice 37 ♢♢♢ **Intégrales de Dirichlet et de Borwein** 50 min

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I existe à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \to 0$.
3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,\mathrm{d}u$. Vérifier que $I_{n+1} - I_n = 0$. En déduire I_n.
4. Soit $f(u) = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{\sin u}$. Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
5. En appliquant les résultats de la question 2, trouver la valeur de I puis de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
6. a) Rappeler le principe des sommes de Riemann.

   b) En déduire un programme Python qui approche les intégrales $\displaystyle\int_{-A}^{+A} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(x/3)}{x/3}\,\mathrm{d}x$, etc. Commenter.

6 Convexité

Exercice 38 ◇ **Une inégalité de convexité** 20 min

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ sur $]1; +\infty[$.
2. En déduire que pour tous $a, b \in]1; +\infty[$, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \cdot \ln b}$.

Exercice 39 ◇◇ 1h

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $t_1 + t_2 = 1$. On appelle :

- *moyenne harmonique pondérée* de a et b : $\dfrac{1}{m_H} = t_1 \cdot \dfrac{1}{a} + t_2 \cdot \dfrac{1}{b}$.
- *moyenne géométrique pondérée* de a et b : $\ln m_G = t_1 \ln a + t_2 \ln b$.
- *moyenne arithmétique pondérée* de a et b : $m_A = t_1 a + t_2 b$.

1. En vous servant de la concavité de ln, montrer que $m_H \leq m_G \leq m_A$.
2. On définit (a_n), (b_n) par $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right).$$
   Proposer un programme Python qui prend au hasard $a_0 \in [0;1]$, $b_0 \in [0;300]$ et affiche les 8 premiers termes.
3. Que peut-on conjecturer sur les suites (a_n), (b_n) ?
4. Étudier les variations de (a_n), (b_n). En déduire qu'elles convergent vers une limite commune ℓ. En calculant $a_n b_n$, donner une relation liant ℓ et $a_0 b_0$.
5. a) Montrer que $a_{n+1} - \ell = \dfrac{(a_n - \ell)^2}{2a_n}$. Déduire un résultat analogue pour $(a_{n+1} + \ell)$.

   b) Calculer $\dfrac{a_n - \ell}{a_n + \ell}$ en fonction de n. Déduire un équivalent de $(a_n - \ell)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 40 ◇◇◇ *D'après oraux ESCP* 45 min

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fois dérivable et $\alpha > 0$. On suppose f majorée et $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.
3. a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

   b) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

   c) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
4. a) Montrer que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.

b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.

5. Montrer que pour tout $t \geq 0$: $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

7 Problèmes

Exercice 41 $\diamond\diamond\diamond$ **Autour de la constante d'Euler** *Sujet EMLyon 2002* 1h30

On note pour tout $p \geq 1$ et $n \geq 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p.$$

Partie I. Montrer que $0 \leq u_p \leq \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$. En déduire que (a_n) converge vers γ avec $0 \leq \gamma \leq 1$.

Partie II. *Expression intégrale de* γ.

1. a) Établir $1 + x \leq e^x$ pour tout x.

   b) En déduire $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ pour $0 \leq t \leq n$.

2. a) Établir $(1-x)^n + nx - 1 \geq 0$ pour $x \in [0;1]$.

   b) En déduire $0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$ pour $0 \leq t \leq n$.

3. a) Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t$.

   b) Établir que $I_n \to 0$.

4. a) Établir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n(a_n + \ln(n+1))$.

   b) Justifier l'existence de $J_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t$ et montrer $J_n = a_n + \ln(n+1)$.

5. En notant $U = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $V = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, justifier leur existence et démontrer $\gamma = U - V$.

Exercice 42 $\diamond\diamond$ **Les restes...** 2h

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $\sum u_n$ converge, on définit $R_{1,n} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Si de plus $\sum R_{1,n}$ converge, on dit que $\sum u_n$ est *doublement convergente* et on pose $R_{2,n} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$.

1. Exemple 1. $u_k = \dfrac{1}{(k+1)k}$. Calculer $R_{1,n}$. La série est-elle doublement convergente ?

2. Exemple 2. $u_k = \dfrac{1}{2^k}$. Reprendre.

3. Exemple 3. $u_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Rappeler la CNS de convergence.

b) Montrer que $R_{1,n} \sim \dfrac{1}{\alpha - 1} \cdot \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

c) Sous quelle CNS la série est-elle doublement convergente ?

d) Conjecturer et prouver le plus grand entier p pour lequel $\sum u_k$ est p-convergente.

4. Exemple 4. $u_k = \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

a) Justifier $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \to 0$.

b) Prouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire la convergence et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$.

d) Prouver $R_{1,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

e) Généraliser : $R_{p,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$.

Chapitre 2 Algèbre

1 Systèmes linéaires et matrices

1.1 Le pivot de Gauss

Méthode

Calcul du noyau d'une matrice par pivot de Gauss.

Exemple : noyau de $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On résout $AX = 0$ par opérations élémentaires sur les lignes, jusqu'à obtenir un système triangulaire dont on extrait les solutions.

Exercice 43 ♢ 5 min pour A, 20 min pour B

Calculer les noyaux des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_\alpha = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Méthode

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

On résout $AX = Y$ pour tout Y par pivot de Gauss. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 44 ♢ 10 min

Calculer, quand il existe, l'inverse des matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Méthode

Comment calculer le rang d'une matrice par pivot de Gauss ?

On cherche les relations linéaires entre les colonnes. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{rg}(A) = 2$.

1.2 Inversibilité et puissances d'une matrice

Méthode

Comment justifier qu'une matrice est inversible ?

1. Pivot de Gauss si les coefficients sont explicites.
2. Relation polynomiale sur A, isoler I_n.
3. Matrice diagonale : coefficients diagonaux non nuls.
4. Taille 2 : formule du déterminant.
5. Noyau trivial.
6. Rang maximal.
7. Triangulaire : coefficients diagonaux non nuls.
8. Taille 2 : déterminant non nul.

Exercice 45 ♢ 15 min

Calculer, s'il existe, l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 46 ♢ **Vrai ou faux ?** 5 min

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible.
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 47 ♢ *Extrait oraux ESCP* 25 min

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit un projecteur. On note J cette matrice.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + e^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + e^x)J$. Calculer $F(x)F(y)$. $F(x)$ est-elle inversible ? Et $G(x)$?

Méthode

Calcul des puissances via le binôme de Newton.

$A = 2I_3 + N$ avec $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$. On applique le binôme : $A^p = 2^p I_3 + p \cdot 2^{p-1} N + \binom{p}{2} 2^{p-2} N^2$.

Exercice 48 ♢ 20 min

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. a) Déterminer α, β tels que $A = \alpha P + \beta Q$.
   b) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Méthode

Comment calculer les puissances par « diagonalisation » ?

Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^p = PD^pP^{-1}$.

Exercice 49 ◇◇ 20 min

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. En examinant les instructions Python suivantes, calculer les puissances de A :

```python
import numpy as np
A = np.array(([1,-6,0],[2,-6,2],[2,-4,3]))
P = np.array(([6,2,-1],[2,1,0],[-1,0,1]))
P_inv = np.linalg.inv(P)
P_inv @ A @ P
```

2 Polynômes

Exercice 50 ◇ **Localisation des racines** 20 min

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \dots + |a_{n-1}| \leq |a_n|$.

1. Justifier que les racines réelles de $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ sont toutes dans $[-1; 1]$.
2. En déduire que $Q(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x + 1$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{Z}$.

Méthode

Comment prouver qu'un polynôme est nul ?

Il suffit de justifier que tous les coefficients sont nuls, ou que le polynôme admet une infinité de racines, ou strictement plus de racines (avec multiplicité) que son degré.

Exercice 51 ◇◇ 30 min

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts.

1. a) Montrer qu'il existe un unique $L_k \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $L_k(x_i) = 0$ pour $i \neq k$ et $L_k(x_k) = 1$.
   b) Vérifier que $\deg L_k = n$.
   c) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Soit $y_0, \dots, y_n$ des réels quelconques. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i. (P est le *polynôme d'interpolation de Lagrange.*)

Exercice 52 ◇◇ **Polynômes de Bernoulli** 40 min

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = nx^{n-1}. \qquad (\bullet_n)$$

1. Soit P une solution de $(\bullet_n)$. Montrer que $\deg P = n$.
2. Si P_1, P_2 sont deux solutions de $(\bullet_n)$, justifier que $P_1 - P_2$ est constante.
3. Soit $n \geq 2$. Vérifier que si P est solution de $(\bullet_n)$ alors $\frac{1}{n}P'$ est solution de $(\bullet_{n-1})$.
4. On définit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $B_0 = 1$ et $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$, $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$.
   a) Pourquoi (B_n) est-elle bien définie ? Préciser B_1, B_2, B_3.
   b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_1^2 B_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   c) Donner $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

3 Espaces vectoriels

3.1 Généralités

Méthode

Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel : vérifier que pour tout scalaire λ et tous vecteurs u, v de F, $\lambda u + v \in F$ et $F \neq \emptyset$ (il suffit d'exhiber 0_E).

Exercice 53 ♢♢ 20 min

Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}, \quad E_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + c\}, \quad E_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 2\},$$
$$E_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + c^2 = b\}, \quad E_5 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\}, \quad E_6 = \{P \in \mathbb{R}[x],\ P(0) = 3\},$$
$$E_7 = \{P \in \mathbb{R}[x],\ P(3) = 0\}, \quad E_8 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x,\ |f(x)| \leq K\},$$
$$E_9 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x,\ |f(x)| \leq K\}\ (K \text{ fixé}), \quad E_{10} = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \text{ paire}\}.$$

Méthode

Comment justifier qu'une famille est libre ?

On applique la définition : si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$ alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Exercice 54 ♢ **Familles libres** 35 min

1. Dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ avec $\varepsilon_1 = (3, -1, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, -1, 0)$, $\varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Justifier que (A, B, C, D) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Que dire de la liberté de (A, B, C, D, I_2) ?
3. ♢♢ Dans les espaces fonctionnels.
   a) Étudier la liberté de $(f_1, f_2, f_3) = (\ln, \exp, \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*})$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
   b) Étudier la liberté de $(\tan, \tan^2, \ldots, \tan^n)$ dans l'espace des fonctions sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 55 ♢ **Avec un peu d'algèbre linéaire...** 15 min

On définit $f : x \mapsto \cos x$, $g : x \mapsto \sin(x^2)$, $h : x \mapsto \cos(x^3)$.

1. Donner les DL de f, g, h en 0 à l'ordre 4.
2. En déduire que (f, g, h) est libre dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Méthode

Comment justifier que deux sous-espaces sont supplémentaires ?

Exemple : polynômes pairs F et impairs G dans $\mathbb{R}[X]$. Analyse : si $P = P_i + P_p$, alors $P_i(X) = \dfrac{P(X) - P(-X)}{2}$ et $P_p(X) = \dfrac{P(X) + P(-X)}{2}$. Synthèse : on vérifie que ces expressions conviennent. Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 56 ♢ 20 min

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons S_n et A_n les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques. Justifier que S_n et A_n sont supplémentaires.

3.2 Précision en dimension finie

Méthode

Comment montrer qu'une famille est une base ? Elle est libre et contient $\dim(E)$ éléments.
Comment prouver $F = G$? Montrer $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$.

Exercice 57 ◇ 20 min

Donner une base des espaces suivants et préciser leur dimension.

1. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a+b+c+d=0 \right\}$
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(4) = 0\}$
3. $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ diagonale}\}$
4. E_4, le SEV des matrices symétriques de taille n

4 Applications linéaires

Méthode

Comment déterminer une base du noyau ?
On résout $f(X) = 0$ par pivot de Gauss.

Exercice 58 ◇ 10 min

Soient $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ linéaires. Établir l'équivalence entre : (i) $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$; (ii) $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$.

Exercice 59 ◇ **Noyaux et images itérés** 10 min

Soient E de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.

Exercice 60 ◇◇ 25 min

Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Préciser $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker g$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
3. Vérifier que $\ker(g \circ f) = \ker f$.
4. Conclure que $(\ker f) \cap (\mathrm{Im}\, g) = \{0_E\}$.

Méthode

Comment prouver que p est un projecteur ? p est linéaire et $p^2 = p$.

Exercice 61 ◇ 10 min

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $p(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z,\ y,\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z\right)$. Montrer que p est une projection et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 62 ◇ 20 min

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u = (1, 2, -1)$, $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la projection p sur F parallèlement à G et q sur G parallèlement à F.

Exercice 63 ◇ 20 min

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\varphi : M \mapsto AMB$.

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est bijective et exprimer φ^{-1}.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

```python
import numpy as np
A = np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))
B = np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Exercice 64 ◇ 20 min

Soit E de dimension finie n. On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.

1. Montrer que $\ker g \subset \mathrm{Im}\, f$ puis qu'il y a égalité. Que peut-on déduire sur $g \circ f$?
2. En déduire que f et g sont des projecteurs de E.

Exercice 65 ◇◇ 30 min

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On suppose que $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

1. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Dans cette question, on suppose $n = 2$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, montrer que $(x, f(x))$ est une base de E. Préciser la matrice J de f dans cette base.
3. ◇◇◇ Généralisation. Justifier que dans le cas général (n pair), il existe une base $\mathcal{B}$ pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J & 0_2 & \cdots \\ 0_2 & J & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$.

Problème

Exercice 66 ◇ **Les nombres balances** 2h40

Un nombre $b \in \mathbb{N}^*$ est dit *nombre balance* s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 + 2 + \cdots + (b-1) = (b+1) + (b+2) + \cdots + (b+r).$$

Par exemple, 6 est un nombre balance (avec $r = 2$) : $1+2+3+4+5 = 7+8$.

A. Introduction et simulation

1. Écrire un programme `sommes` qui prend en argument b, r et renvoie $S(b,r) = (b+1) + \cdots + (b+r)$.
2. Compléter le programme `TestBalance(n)` qui renvoie tous les nombres balances entre 1 et n :

```python
def TestBalance(n):
    for b in range(...):
        for r in range(...):
            if ....:
                print(b,'est un nombre balance avec r=',r)
```

B. Étude théorique, condition (•)

1. a) Donner les expressions de $S(0, b-1)$ et $S(b,r)$.
   b) Justifier que b est nombre balance ssi il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $r^2 + (2b+1)r = b(b-1)$.
   c) Le discriminant est $\Delta = 8b^2 + 1$. Préciser l'unique solution positive.
2. Justifier que n^2 est impair ssi n est impair.

3. Montrer que b est nombre balance ssi il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $8b^2 + 1 = a^2$. $(\bullet)$

C. Étude de la condition $(\bullet)$

On considère $\mathcal{E} = \{(a;b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 - 8b^2 = 1\}$.

1. Vérifier que $(1,0)$ et $(3,1)$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
2. On définit (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $a_{n+1} = 3a_n + 8b_n$, $b_{n+1} = 3b_n + a_n$.
   a) Démontrer que $a_n + \sqrt{8}b_n = (3+\sqrt{8})^n$.
   b) En déduire que $(a_n; b_n) \in \mathcal{E}$ pour tout n.
   c) Calculer a_2 et b_2.
3. a) Montrer que $b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{8}}\big((3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n\big)$.
   b) Justifier que $b_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1} 3^{n-2i-1} 8^i$.
4. a) Justifier que $b_{n+2} = 6b_{n+1} - b_n$.
   b) En déduire un programme Python qui calcule b_n.
5. Préciser b_3 et b_4. Pourquoi existe-t-il une infinité de nombres balances ?

D. Approche matricielle

On pose $S(a,b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{8}b \\ \sqrt{8}b & a \end{pmatrix}$ et $\mathbb{E} = \{S(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z},\ \det S(a,b) = 1\}$.

1. a) Démontrer $(a,b) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow S(a,b) \in \mathbb{E}$.
   b) Justifier $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. En déduire que $\mathbb{E}$ est stable par produit.
   c) Justifier que $\mathbb{E}$ est stable par passage à l'inverse.
2. Exemple. Vérifier $A_0 = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$. Avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, déduire les puissances de A_0 et vérifier $A_0^n = S(a_n, b_n)$.
3. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donne tous les nombres balances.

Chapitre 3 Probabilité

Exercice 67 ◇◇ **Rang du premier Pile-Face** 25 min

Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier Pile-Face (aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, $X = 0$. On note A_i l'événement « Un pile apparaît au i-ème lancer ».

1. En utilisant le système complet $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$:
$$\mathbf{P}([X = k+1]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([X = k]) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$
2. En déduire $\mathbf{P}([X = k])$ pour tout $k \geq 2$. *On pourra introduire* $v_k = 2^k\mathbf{P}([X = k])$.
3. Préciser $\mathbf{P}([X \geq 2])$ puis $\mathbf{P}([X = 0])$.
4. Justifier que X admet une espérance. La calculer.

Exercice 68 ◇◇ 30 min

Un pion se déplace sur un axe gradué, initialement à l'origine. On lance n fois une pièce équilibrée. À chaque lancer, le pion se déplace d'une unité à gauche (face) ou à droite (pile). On note X_n l'abscisse et Y_n le nombre de faces.

1. Donner la loi de Y_n. Préciser l'espérance et la variance.
2. a) Exprimer X_n en fonction de Y_n.
   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Notons Z_n la distance à l'origine.
   a) Donner la loi de Z_2 et Z_3.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\mathbf{V}(Z_n) \leq \mathbf{V}(X_n)$.
4. a) Préciser $\mathbf{P}([X_n = 0])$ en fonction de la parité de n.
   b) En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, donner un équivalent simple de $\mathbf{P}([X_{2n} = 0])$.

Exercice 69 ◇◇◇ **Les fonctions génératrices** 40 min

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[\![0; n]\!]$. On définit la *fonction génératrice* G_X par $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X = k])t^k$.

1. a) Préciser $G_X(1)$.
   b) Justifier que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.
   c) Trouver une relation simple entre $\mathbf{V}(X)$, $G''_X(1)$ et $G'_X(1)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}(t^X) = G_X(t)$.
3. Un basketteur a n paniers à tenter. Il s'arrête au premier échec. La probabilité de réussite au i-ème lancer est $q_i \in]0; 1[$. Soit X_n le nombre de paniers réussis.
   a) Donner la loi de X_n en fonction des q_i.
   b) Si $q_i = q$ pour tout i, prouver que $G_{X_n}(t) = p\,\dfrac{1-(qt)^n}{1-qt} + (qt)^n$.
   c) En déduire $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{q}{p}(1-q^n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 70 ◇◇◇ **Une seconde expression de l'espérance** 35 min

Soit X une v.a. discrète avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

1. Préliminaires.
   a) Exprimer $\mathbf{P}([X = k])$ à l'aide de $\mathbf{P}([X > k])$ et $\mathbf{P}([X > k-1])$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([X = k]) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}([X > k])\right) - n\mathbf{P}([X > n])$.

2. On suppose X d'espérance finie.

a) Montrer que $n\mathbf{P}([X > n]) \to 0$.

b) En déduire que $\sum \mathbf{P}([X > k])$ converge et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > k])$.

3. Réciproquement, si $\sum \mathbf{P}([X > k])$ converge, montrer que X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > k])$.

Exercice 71 ◇◇ 45 min

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $p \in]0; 1[$, $q = 1 - p$. On tire avec remise dans une urne de proportion p de boules blanches, et on s'arrête à la première blanche ou après n boules noires. On note T_n le nombre de lancers et X_n, Y_n les nombres de blanches et noires.

1. Étude de T_n :

a) Pour $k \in [\![1; n - 1]\!]$, exprimer $[T_n = k]$ à l'aide des B_i et en déduire $\mathbf{P}([T_n = k])$.

b) Démontrer $\mathbf{P}([T_n = n]) = q^n + q^{n-1}p$.

c) Vérifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([T_n = k]) = 1$.

d) Calculer $\mathbb{E}(T_n)$.

2. Étude de X_n :

a) Vérifier que X_n suit une loi de Bernoulli et préciser le paramètre.

b) En déduire espérance et variance.

3. Étude de Y_n :

a) Exprimer Y_n avec X_n et T_n.

b) Donner $\mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice 72 ◇◇◇ *D'après oral ESCP* 1h10

Un individu gravit un escalier. À chaque pas, il lance une pièce non équilibrée (pile avec probabilité $p < 1/2$) : pile = une marche, face = deux marches.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies et X'_n le nombre d'enjambées de 2.

a) Relier X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.

b) Donner l'espérance et la variance de X_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre de pas pour atteindre ou dépasser la n-ème marche.

a) Valeurs prises par Y_n ?

b) Déterminer la loi de Y_1 puis de Y_2, et leurs espérances.

c) Montrer que pour $n \geq 3$: $\mathbf{P}(Y_n = k) = p\mathbf{P}(Y_{n-1} = k - 1) + (1 - p)\mathbf{P}(Y_{n-2} = k - 1)$.

d) Montrer que pour $n \geq 3$: $\mathbb{E}(Y_n) = p\mathbb{E}(Y_{n-1}) + (1 - p)\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$.

3. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites (u_n) vérifiant $u_n = pu_{n-1} + (1 - p)u_{n-2} + 1$ pour $n \geq 3$.

a) Montrer qu'il existe α (à déterminer) tel que $(\alpha n) \in \mathcal{E}$.

b) Montrer que $u \in \mathcal{E}$ ssi $v_n = u_n - \alpha n$ vérifie $v_n = pv_{n-1} + (1 - p)v_{n-2}$.

c) En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice 73 ◇◇◇ **Les moments déterminent la loi** *D'après oraux HEC* 45 min

1. Rappeler la définition de l'espérance et de la variance d'une v.a. discrète.
2. Soit Y prenant les valeurs $0, 1, 2$ avec probabilités p_0, p_1, p_2. On suppose $\mathbb{E}(Y) = 1$ et $\mathbb{E}(Y^2) = 5/3$. Calculer p_0, p_1, p_2.
3. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $Q \mapsto (Q(x_0), \ldots, Q(x_n))$.
   a) Montrer que φ est un isomorphisme.
   b) Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques.
   c) Soit X prenant les valeurs $x_0, \ldots, x_n$. Si on connaît $\mathbb{E}(X), \ldots, \mathbb{E}(X^n)$, peut-on déterminer la loi de X ?

Chapitre 4 Python

1 Quelques programmes de référence

1.1 Tracé d'une courbe

La commande `plt.plot(x,y)` permet de tracer une ligne brisée reliant les points (x_i, y_i). Pour tracer la courbe d'une fonction, on crée une liste `x` avec `np.linspace()`, puis on applique la fonction. Plus le nombre de points est grand, plus le tracé est précis.

Exemple : courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0; 10]$ avec 10 puis 100 points :

```
A = np.linspace(0, 10, 100)
D = 1/(1+A**2)
plt.plot(A, D)
```

Exercice 74 ◇ 15 min

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Comment obtenir le graphe de f sur $[-5; 5]$?
2. Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.
3. Donner le graphe de la réciproque.

1.2 Boucle for – Calcul du n-ième terme d'une suite

Ordre 1. Suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 5$:

```
def Suite(n):
    u = 1
    for i in range(1, n+1):
        u = u**2 - 3*u + 5
    return u
```

Exercice 75 ◇ 10 min

1. Écrire une fonction calculant le n-ième terme de $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}/2$.
2. Conjecturer et prouver une formule simple pour u_n.
3. Comment renvoyer $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$?

Récurrence à plusieurs pas. Suite d'ordre 2 : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$:

```
def rec2(u0, u1, n):
    u, v = u0, u1
    for i in range(n-1):
        w = 2*v + u
        u, v = v, w
```

```
    print("u{}={}".format(n, w))
```

1.3 Boucle `for` – Calcul d'une somme/d'un produit

Exemple : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$:

```
def Somme_S(n):
    s = 0
    for i in range(0, n+1):
        s += i**3
    return s
```

Exercice 76 ◇ 5 min

Écrire un programme qui calcule $\prod_{k=0}^{99} \cos\left(\frac{k\pi}{200}\right)$.

1.4 Boucle `for` – Principe d'un compteur

Exemple : compter les nombres premiers inférieurs à 100 :

```
Compteur = 0
for k in range(2, 101):
    Diviseurs = 0
    for i in range(2, k//2+1):
        if (k % i) == 0:
            Diviseurs += 1
    if Diviseurs == 0:
        Compteur += 1
print("Nombres premiers inferieurs a 100 :", Compteur)
```

1.5 `While` – Algorithme de seuil

Exemple : plus petit n tel que $|u_n - 2| \leq 10^{-3}$ avec $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{(n+1)(n+2)}$:

```
u = 0
n = 0
while abs(u-2) > 0.001:
    u = u + 2/((n+1)*(n+2))
    n = n+1
print("La plus petite valeur est :", n)
```

Exercice 77 ◇ 10 min

Écrire un programme qui prend en argument un réel A et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$.

1.6 `While` – Approximation de limite à une précision donnée

Exemple : approximation de $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ à 10^{-3} près, sachant $|\ell - u_n| \leq \frac{1}{n}$:

```
def limite(precision):
    s = 1
    n = 1
    erreur = 1
    while erreur > precision:
        n += 1
        s += 1/(n**2)
        erreur = 1/n
    return s
```

Exercice 78 ◇◇ 15 min

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Écrire une fonction qui prend en argument $\varepsilon > 0$ et renvoie une approximation de e à ε près.

1.7 `While` – Algorithme de dichotomie

```python
def dichotomie(a0, b0, precision):
    a = a0
    b = b0
    p = precision
    while b-a > p:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return b
```

2 Les exercices

Exercice 79 ◇ 20 min

Écrire un programme qui prend en argument une fonction f, un entier n et deux réels $a < b$, et renvoie la somme de Riemann :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Tester en calculant $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 80 ◇ 10 min

Écrire une fonction `puissance` qui prend en argument $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$ et renvoie la plus petite puissance de a supérieure ou égale à n.

Exercice 81 ◇◇ 20 min

On définit la suite réelle u par $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{1 + u_0^2 + \cdots + u_{n-1}^2}{n}$ pour $n \geq 1$. Écrire un programme qui calcule les dix premiers termes de cette suite.

Exercice 82 ◇◇ 10 min

La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. Écrire un programme qui calcule les termes successifs (S_n) jusqu'à ce que $S_n - S_{n-1} < 10^{-10}$ et renvoie le dernier S_n calculé.

Exercice 83 ◇◇ **Suite périodique** 30 min

On définit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ si $x \in [0; 1/2]$ et $f(x) = 2(1-x)$ sinon. La suite u est définie par $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner le graphe de f.
2. Écrire un programme qui prend u_0 et n et renvoie les n premiers termes.
3. a) Tester pour $u_0 = 1/2$, $1/4$, $1/8 \ldots$ Que se passe-t-il ? Énoncer un résultat pour $u_0 = 1/2^p$, $p \in \mathbb{N}$.
   b) Tester $u_0 \in \{2/5; 2/7; 2/11; \ldots\}$. Que constate-t-on ?

Exercice 84 ◇◇◇ Approximation de la longueur d'une courbe 30 min

1. Écrire une fonction qui prend deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et renvoie la distance AB.
2. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. Écrire un programme approchant la longueur de la courbe représentative de f par la somme des distances entre $n + 1$ points équirépartis sur la courbe.

Exercice 85 ◇◇◇ Suites adjacentes 30 min

On considère le programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n = 30
x = np.arange(1, n+1)
y = np.zeros(n)
eps = 1
for i in range(n):
    y[i] = eps/(i+1)
    eps = eps*(-1)
z = np.cumsum(y)
plt.axis([0, 30, 0.35, 1.1])
plt.plot(x, z, '*')
plt.show()
```

1. Préciser le contenu des variables y et z après exécution.
2. Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 86 ◇◇ La courbe Blanc-manger 30 min

Pour tout réel x, on note $d(x)$ la distance de x au plus proche entier : $d(x) = \dfrac{1 - |1 - 2x + 2\lfloor x \rfloor|}{2}$.

1. Tracer la courbe de d sur $[-3; 3]$.
2. Écrire un script traçant $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d(2^k x)}{2^k}$ pour $n \in \{3, 6, 10\}$.
3. Justifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ la convergence de $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Notons $S(x)$ la limite. Que dire de la régularité de S ?

Exercice 87 ◇ Moments 20 min

Soit X une v.a. sur un univers fini, codée par `val` $= [x_1, \ldots, x_m]$ et `Loi` $= [\mathbf{P}(X{=}x_1), \ldots]$.

1. Écrire une fonction `moment(val, loi, s)` qui renvoie $\mathbb{E}(X^s)$.
2. En utilisant uniquement `moment`, écrire une fonction calculant la variance.

Exercice 88 ◇◇ Lois usuelles avec `random()` 30 min

Une urne contient 5 boules (1 rouge et 4 bleues). On tire avec remise.

1. Soit $X = 1$ si rouge, 0 sinon. Préciser la loi. Simuler X avec `random` uniquement.
2. On répète n fois. Soit Y le nombre de rouges. Loi de Y ? Simuler Y.
3. On répète infiniment. Soit Z le rang de la première boule rouge. Loi de Z ? Simuler Z.
4. Simuler X_2 (rang de la 2e rouge). Généraliser à X_r.

Chapitre 5 Solutions

Solutions du Chapitre 1 : Analyse

Solution 1.

- $C_1 = \sum_{k=0}^{n}(n-k) + \sum_{k=n+1}^{2n}(k-n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.
- $C_2 = \ln\left(\dfrac{2n^2}{n+1}\right)$.
- $C_3 = \sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=0}^{n}\big((k+1)! - k!\big) = (n+1)! - 1$ (télescopage).
- $C_4 = \dfrac{5}{n+3}$ (télescopage après factorisation $k^2+k-2 = (k-1)(k+2)$).
- $C_5 = n!\cdot e^{-n(n+1)}$.

Solution 2. **1.a)** $S_0(n) = n+1$, $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.b) $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n)^2$. *Preuve par récurrence.*

2.a)i) $T_i(n) = (n+1)^{i+1} - 1$. On en déduit $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1$.

2.a)ii) Par le binôme de Newton : $(k+1)^{i+1} = \sum_{q=0}^{i+1}\binom{i+1}{q}k^q$. En sommant sur k de 1 à n : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1}\binom{i+1}{q}S_q(n)$.

2.b) En égalisant les deux expressions de $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{i+1}$, on isole $S_i(n)$.

3. On applique la formule avec $i=4$ en utilisant les expressions connues de S_0, S_1, S_2, S_3.

4.

```python
def Somme(n, i):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S += k**i
    return (i+1)*S/n**(i+1)
```

Les tests permettent de conjecturer $S_i(n) \sim \dfrac{n^{i+1}}{i+1}$.

Solution 3.

1. $u_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{1}{n^2(n^2+1)} \sim \dfrac{1}{n^4}$.
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} + n = n\Big(\sqrt{1+1/n^2}+1\Big) \sim 2n$.
3. $\sqrt{n^2+1} - n = n\Big(\sqrt{1+1/n^2}-1\Big) \sim \dfrac{1}{2n}$.
4. $u_n = \ln\Big(1+e^{1/n^2}\Big) \sim e^{1/n^2} - 1 + 1 = \cdots$, on obtient $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$ (développer).
5. $\ln(1+e^n) = n + \ln(1+e^{-n}) \sim n$, donc $u_n = \sqrt{n+n+o(n)} \sim \sqrt{2n}$... En fait $u_n \sim \sqrt{n} + \frac{\ln 2}{2\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$.
6. $u_n = e^{1/n}(e^{1/n^2}-1) \sim 1\cdot\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$.

Solution 5. (u_n) décroissante donc $u_{n-1} \geq u_n \geq u_{n+1}$, d'où $n(u_n+u_{n+1}) \geq 2nu_n \geq n(u_{n-1}+u_n)$. Or $n(u_n+u_{n+1}) \to 1$ et $n(u_{n-1}+u_n) \to 1$. Par encadrement, $2nu_n \to 1$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$ et $u_n \to 0$.

Solution 7. $A = \dfrac{1}{e-1}$. $B = \dfrac{1}{\ln 2}$ (télescopage : $\frac{\ln(k+1)-\ln k}{\ln k\cdot\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}$). $C = 6$ (série géométrique dérivée).

Solution 8. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$. Série convergente, donc (u_n) converge.

Solution 9. **1.** $e^x - x \geq 1 > 0$ pour tout x, donc $\ln(e^{x_n} - x_n)$ est bien défini et positif.
2.a) $e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - x_n$, donc $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}$.
2.b) (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers $\ell \geq 0$. En passant à la limite : $\ell = e^\ell - e^\ell = 0$.
3. $\sum_{n=0}^{N} x_n = e^{x_0} - e^{x_{N+1}} \to e - 1$.

Solution 11. **2.a)** $|f(y) - f(x)| = \frac{1}{2}|\cos(c)||y - x| \leq \frac{1}{2}|y - x|$.
2.b) Par récurrence : $|v_n| \leq \frac{|v_0|}{2^n}$.
5.

```
def approx(eps):
    import numpy as np
    u = 1
    erreur = 2
    while erreur > eps:
        u = np.sin(u)/2 + 2
        erreur = erreur/2
    return u
```

Solution 13 (Cesaro). **3.** $v_n = 1/u_n$ vérifie $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\beta u_n + 1}{u_n(1+\alpha u_n)} - \frac{1+\beta u_n}{u_n(1+\beta u_n)} \to \beta - \alpha$.
5. Par Cesaro, $\frac{v_n}{n} \to \beta - \alpha$, donc $u_n \sim \frac{1}{(\beta - \alpha)n}$.

Solutions du Chapitre 2 : Algèbre

Solution 45. Noyau de A : $\ker(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Noyau de B_α : $\ker(B_\alpha) = \{0\}$ pour $\alpha \notin \{-1, -2, -3\}$; $\ker(B_{-1}) = \mathrm{Vect}(1, -1, 0)^\top$; $\ker(B_{-2}) = \mathrm{Vect}(1, -1, -1)^\top$; $\ker(B_{-3}) = \mathrm{Vect}(1, -2, 1)^\top$.

Solution 46. $D^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\-1 & 3 & -1\\3 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Solution 48. **1. Faux.** $A + (-A) = 0_n$ n'est pas inversible.
2. Vrai. Toute matrice A s'écrit $A = U + L$ avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure à diagonales non nulles.

Solution 56. **3.a)** $(\ln, \exp, \mathrm{id})$ est libre : si $\lambda_1 \ln x + \lambda_2 e^x + \lambda_3 x = 0$ pour tout $x > 0$, diviser par e^x et passer à la limite donne $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.
3.b) $(\tan, \ldots, \tan^n)$ libre : via la bijectivité de tan, on se ramène à un polynôme s'annulant sur $\mathbb{R}$, donc nul.

Solution 63. $\ker(p) = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)^\top$ et $\mathrm{Im}(p) = \{(x, y, z) \mid 2x + y + 2z = 0\}$.

Solution 65. $\varphi^{-1} : M \mapsto A^{-1}MB^{-1}$ avec $A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-7 & 4\end{pmatrix}$.

Matrice de φ dans $\mathcal{B} = (I_2, A, B, AB)$: $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & -1 & -5\\0 & -1 & 0 & -6\\1 & 5 & 6 & 30\end{pmatrix}$.

Solutions du Chapitre 3 : Probabilité

Solution 69. **2.** $v_{k+1} = v_k + 1$ (suite arithmétique), $v_2 = 1$, donc $\mathbf{P}([X = k]) = (k - 1)2^{-k}$.
3. $\mathbf{P}([X \geq 2]) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{+\infty} i(1/2)^{i-1} = 1$, donc $\mathbf{P}([X = 0]) = 0$.
4. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1/2)^{k-2} = \frac{2}{(1-1/2)^3} \cdot \frac{1}{4} = 4$.

Solution 70. **1.** $Y_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$, $\mathbb{E}(Y_n) = n/2$, $\mathbf{V}(Y_n) = n/4$.
2. $X_n = n - 2Y_n$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\mathbf{V}(X_n) = n$.
4.b) $\mathbf{P}([X_{2n} = 0]) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (Stirling).

Solution 75. **2.** Système $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, $p_1 + 2p_2 = 1$, $p_1 + 4p_2 = 5/3$: $p_0 = p_1 = p_2 = 1/3$.
3.c) La matrice A est la matrice de Vandermonde, inversible car les x_i sont distincts. On peut donc retrouver $(p_0, \dots, p_n)$ à partir des moments.

Solutions du Chapitre 4 : Python

```
def Riemann(a, b, f, n):
    S = 0
    pas = (b-a)/n
    for k in range(n):
        S += f(a + k*pas)
    return pas*S
```

```
def suite(n):
    u = 1
    termes = [u]
    for i in range(1, n):
        somme_carres = sum(x**2 for x in termes)
        u = (1 + somme_carres)/i
        termes.append(u)
    print(termes)
```

```
def suite2(u0, n):
    import numpy as np
    u = u0
    termes = np.zeros(n)
    termes[0] = u0
    for i in range(1, n):
        if u <= 1/2:
            u = 2*u
        else:
            u = 2*(1-u)
        termes[i] = u
    return termes
```

Pour $u_0 = 1/2^p$: la suite est nulle à partir du rang $p+1$ (preuve par récurrence).

Solution 89 (Suites adjacentes). $y = \left(\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots\right)$ (termes alternés). $z = \text{cumsum}(y)$ donne les sommes partielles de la série alternée $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers $\ln 2$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def d(x):
    return (1 - abs(1 - 2*x + 2*np.floor(x)))/2

x = np.linspace(0, 1, 1000)
n = 10
```

```python
S = d(x)
for i in range(1, n):
    S += d(2**i * x)/2**i
plt.plot(x, S)
plt.show()
```

3. $|S_n(x) - S_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \to 0$: suite de Cauchy, donc convergente.

4. La fonction S est continue mais nulle part dérivable (fonction de Takagi).